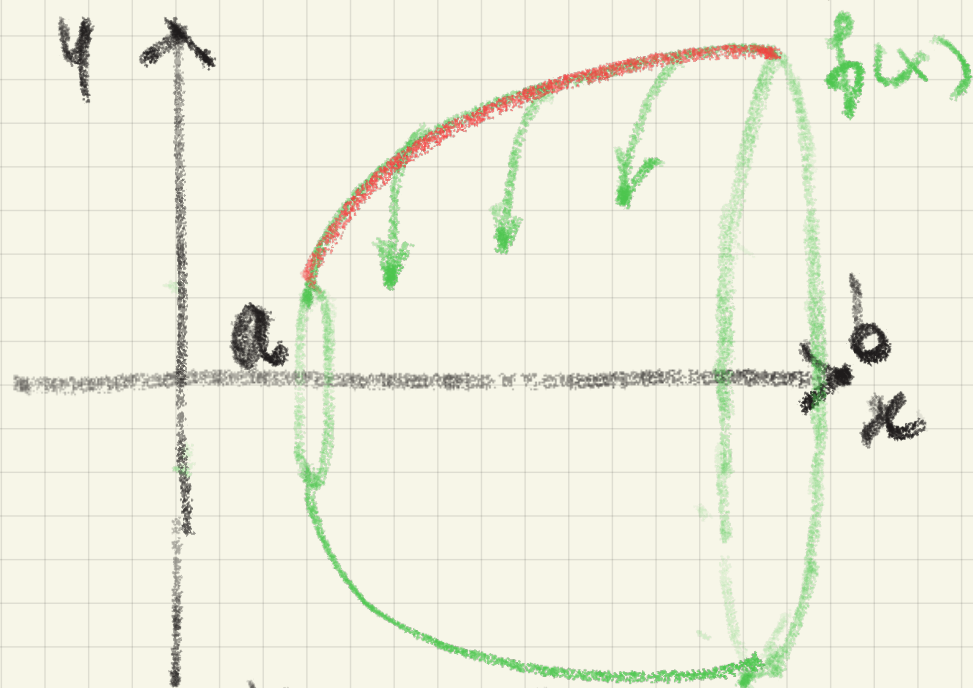


CALCOLO DEI VOLUMI



M5041

CASO 1 : VOLUME DEI SOLIDI DI ROTAZIONE (x)



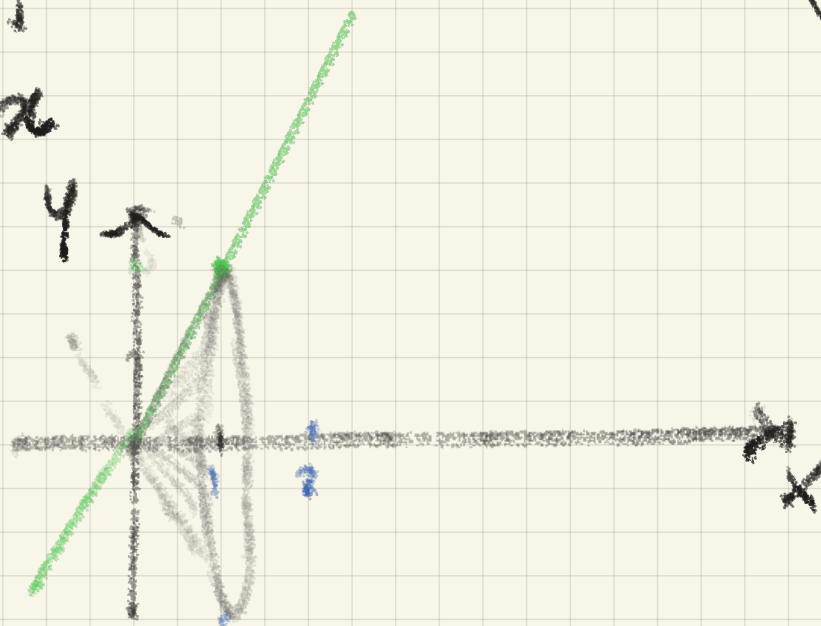
Supponi di far ruotare
intorno all'asse x
la funzione $y = f(x)$
(rossa)
Ottieni un solido di
rotazione.

Puoi ottenere il volume di questo solido dall'integrale

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

ESEMPIO : IL CONO

Abbiamo $f(x) = 2x$

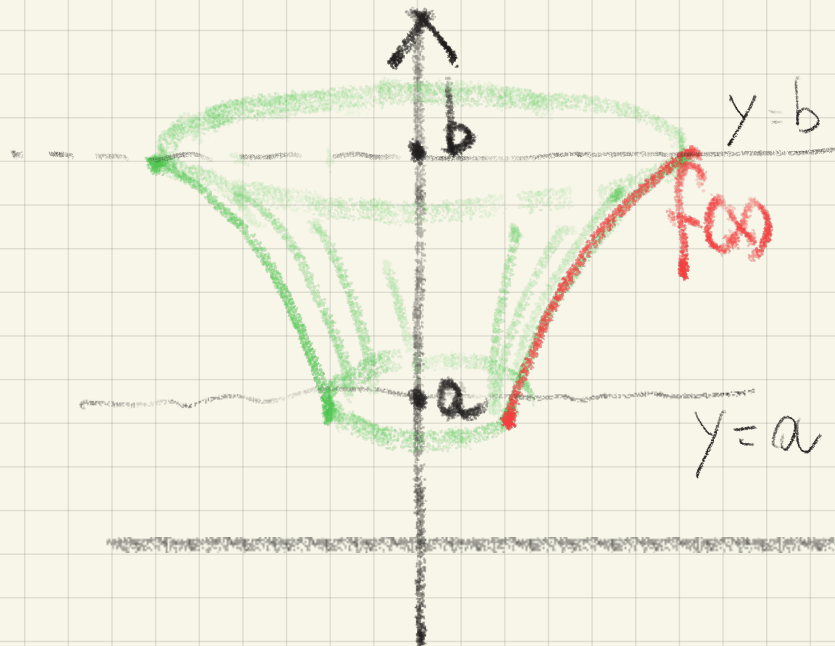


calcolo il volume che si ottiene da una rotazione intorno all'asse x tra 0 e 1. Ottengo un cono di raggio 2 e altezza 1.

$$V = \frac{1}{3} (\text{Area di base}) \cdot \text{altezza} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 4 \cdot 1 = \frac{4}{3} \pi$$

$$V = \pi \int_0^1 [2x]^2 dx = \pi \int_0^1 4x^2 dx = \left[\frac{4}{3} \pi x^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3} \pi$$

CASO 2: VOLUME DEI SOLIDI DI ROTAZIONE (y) *rette orizzontali*



la funzione $f = f(x)$ ruota intorno all'asse y tra a e b

Dobbiamo ricavare la funzione inverse $f^{-1}(x)$ che ci consente di scrivere $x = f^{-1}(y)$

Il volume sarà $V = \pi \int_a^b f(y) dy$

ESEMPIO: $y = 3x^2 - 1$ e vogliamo ricavare il volume del solido di rotazione intorno all'asse y tra 1 e 3.

Ricava la funzione inversa: $3x^2 = y + 1 \rightarrow x^2 = \frac{y+1}{3}$

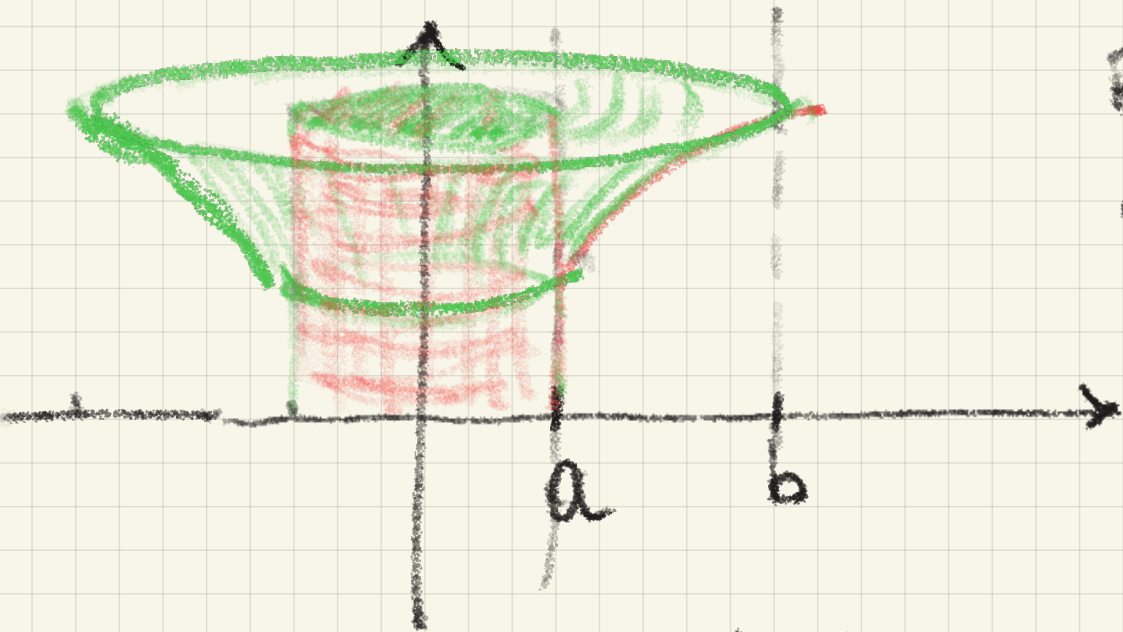
$$x = \pm \sqrt{\frac{y+1}{3}} \quad V = \pi \int_1^3 \sqrt{\frac{y+1}{3}} dy$$

$$= \pi \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^3 (y+1)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} (y+1)^{\frac{1}{2}+1} \right]_1^3 \pi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2}{3} \left[\sqrt{(y+1)^3} \right]_1^3 \pi = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3} \right] \pi = \frac{2}{3\sqrt{3}} [8-1]$$

$$= \frac{14}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \pi = \frac{14\sqrt{3}}{9} \pi$$

CASO 3 : VOLUME DEL SOLIDO DI ROTAZIONE LUNGO y ha rette verticali (CAUSO CILINDRICA)



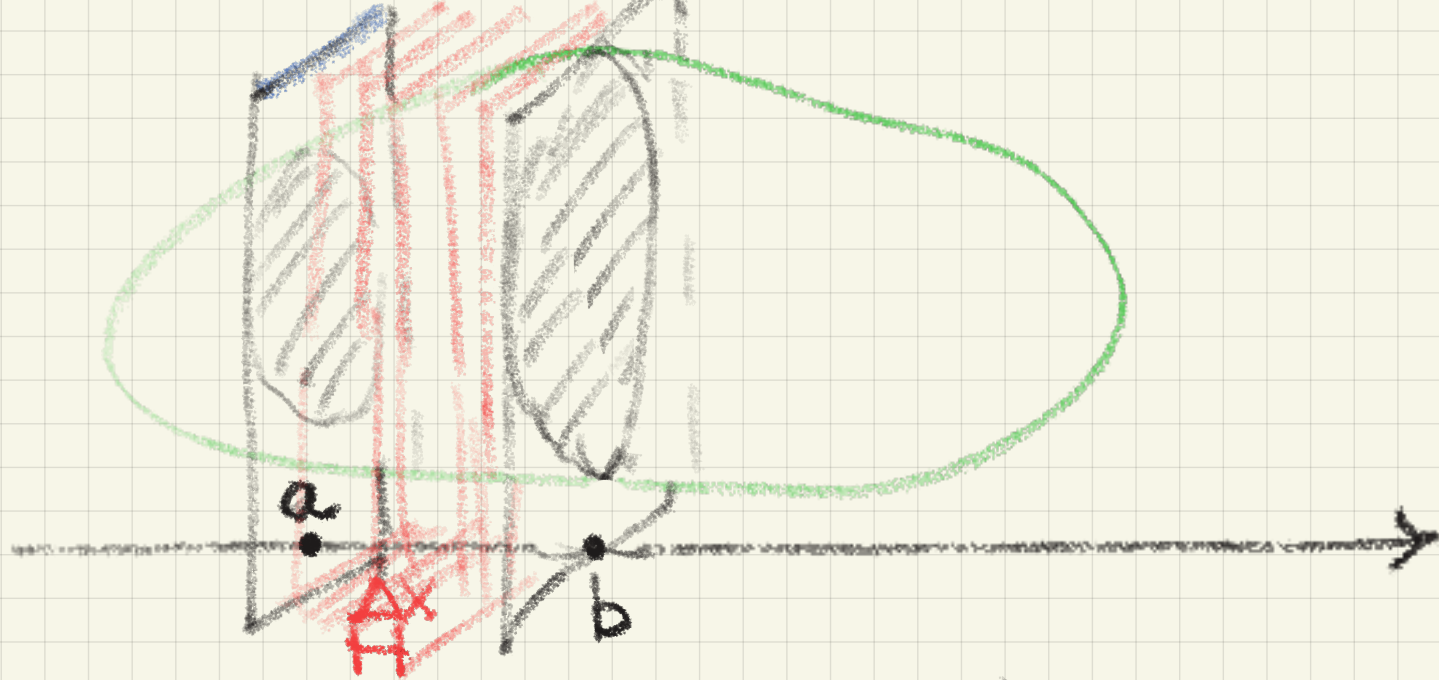
Puoi applicare

$$V = 2\pi \int_a^b \pi f(x) dx$$

oppure ricavare la funzione inversa per il volume intero e poi sottrarre il cilindro centrale

CASO 4 : IL METODO DELLE SEZIONI

Prendiamo un solido generico e "AFFETTIAMOLO" con piani perpendicolari all'asse x .



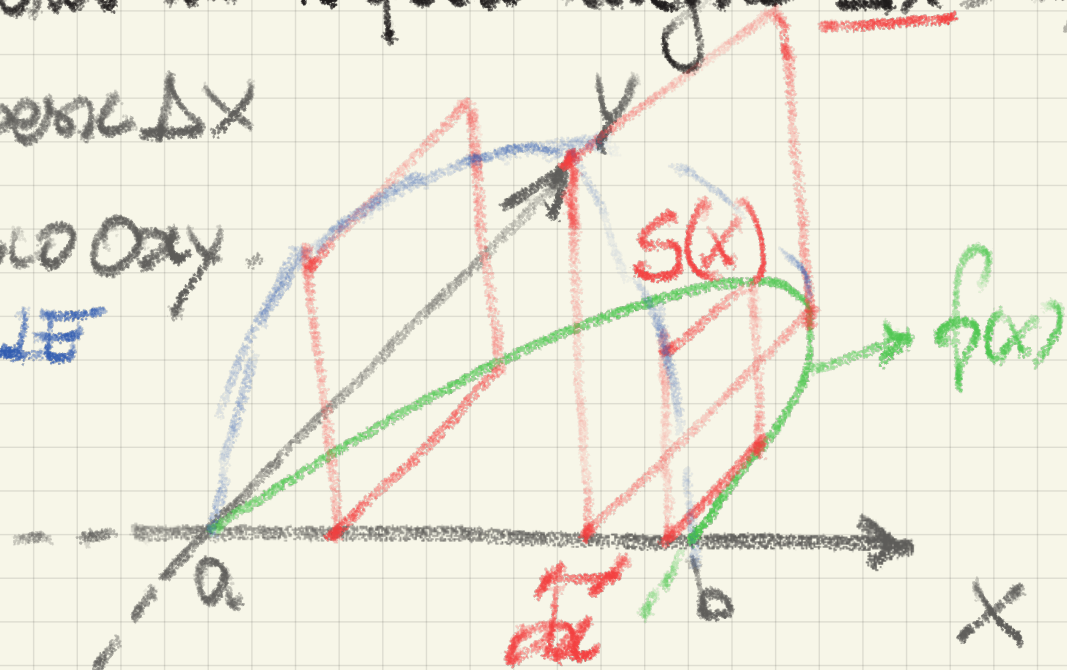
Tra a e b suddividiamo in n parti larghe $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

otteniamo n fette spesse Δx

Guardiamo sul grafico Oax.

SE LE SEZIONI SONO QUELLE
ROSSE

$$V = \int_a^b S(x) dx$$



PER SEZIONI QUADRATE

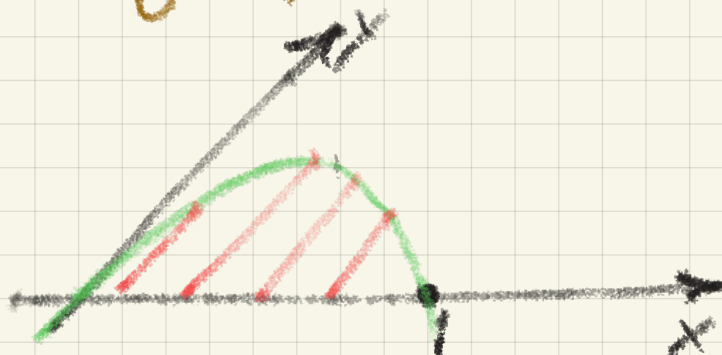
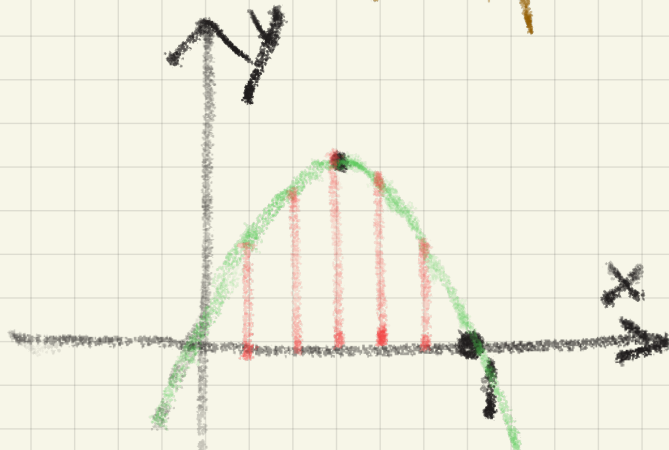
$$S(x) = [f(x)]^2$$

ESERCIZIO 1

considera la funzione

$$y = f(x) = y = -x^2 + x$$

$$V\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$$

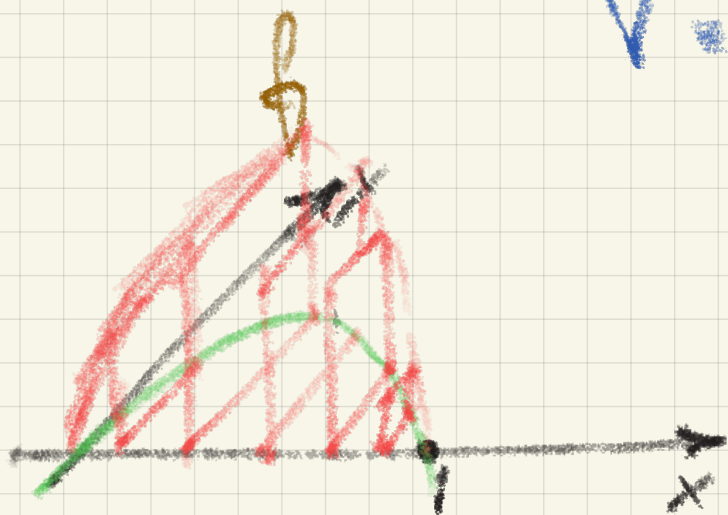


Il volume richiesto è quello che si ottiene da SEZIONI QUADRATE

$$V = \int_0^1 [(-x^2 + x)]^2 dx =$$

$$= \int_0^1 (+x^4 - 2x^3 + x^2) dx$$

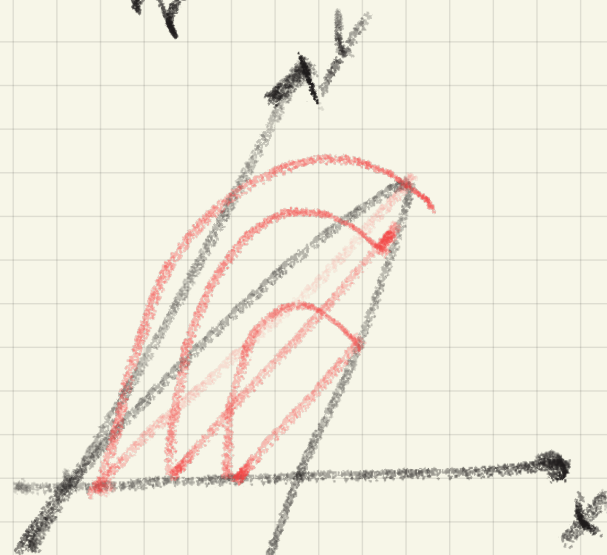
$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6-15+10}{30} = \frac{1}{30}$$



ESERCIZIO 2: $y = -x^2 + 6x$ (serie di semicerchi)

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = +3$$

$$y_v = -9 + 18 = 9$$



SEZIONE: $\frac{1}{2} \pi \left(\frac{f(x)}{2} \right)^2$

$$= \frac{1}{8} \pi f(x)^2$$

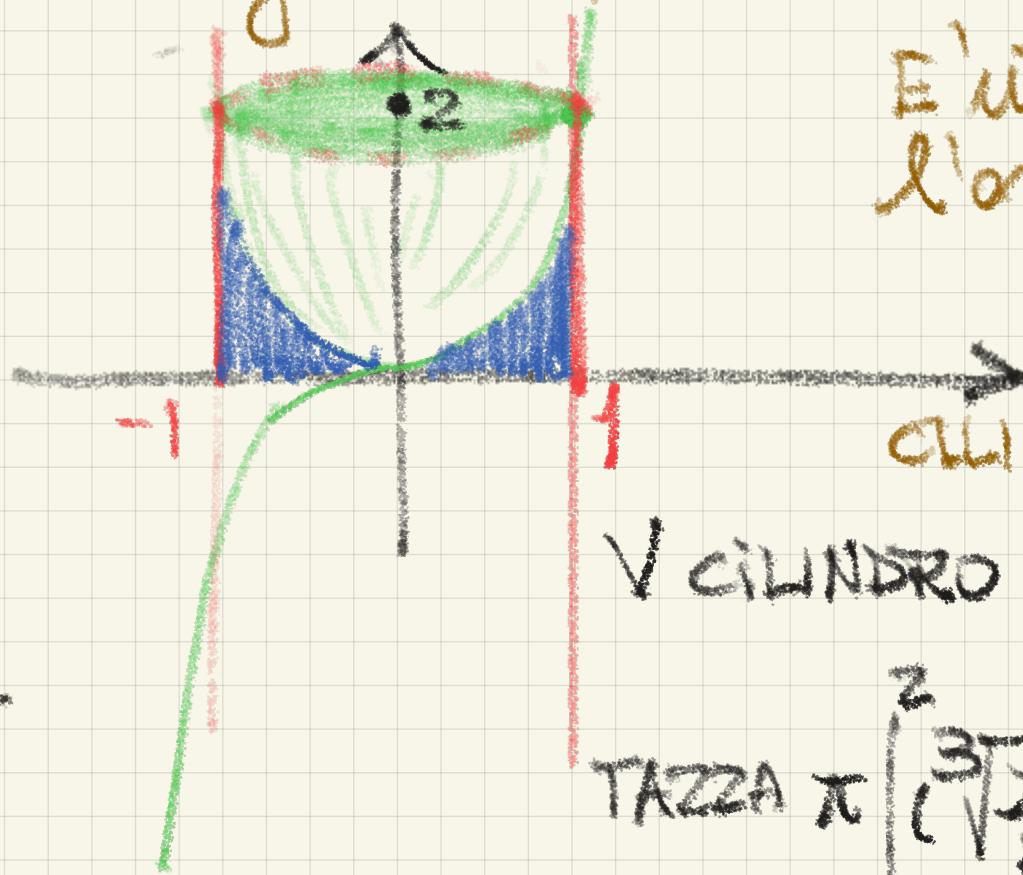
$$V = \int_0^6 \frac{1}{8} \pi (-x^2 + 6x) dx = \frac{301}{6} \pi$$



$$raggio = \frac{f(x)}{2}$$

ESERCIZIO 3: Volume del solido ottenuto dalla rotazione completa intorno a y del trapezoido ottenuto da $y = 2x^3$, dall'asse x e della retta $x = 1$

E' richiesto di trovare l'area blu.



CILINDRO - TAZZA VERDE

$$V \text{ CILINDRO : } \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$$

$$(\pi r^2) \cdot h$$

$$\text{TAZZA } \pi \int_0^2 \left(\sqrt[3]{\frac{y}{2}} \right)^2 dy =$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{y}{2}}$$