OPERAZIONI CON LE MATRICI

M4043

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE : SOLO DELLO STESSO TIPO

SOMMO/SOTTRAGGO GLI ELEMENTI CORRISPONDENTI

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 13 & 13 & 13 \\ 7 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

NON PUOI

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1+3 \quad 2+3 \quad 3+?$$

PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UN NUMERO REALE :

ogni elemento sarà moltiplicato per il numero reale.

$$6 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 24 & 12 & 30 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$

IL PRODOTTO SCALARE FRA UNA MATRICE RIGA E UNA COLONNA

si moltiplicano elementi corrispondenti e si somma

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 4 - 4 + 3 = 3$$

É COMMUTATIVO

STESSO NUMERO DI ELEMENTI.

DEFINIZIONE

Il **prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $n \times p$** è una matrice C di tipo $m \times p$, il cui elemento c_{hk} è dato dal prodotto scalare della riga numero h della prima matrice per la colonna numero k della seconda matrice.

ES: $(3 \times 2) \times (2 \times 3)$

n colonne = n righe

$$\text{riga 3} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & e \cdot n + f \cdot q & \cdots \end{bmatrix} \leftarrow \text{riga 3}$$

colonna 2 ↑   colonna 2 ↑

elemento c_{32}

ESEMPI

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-6} \\ \boxed{13} & \boxed{4} \end{bmatrix} \rightarrow (2 \times 2)$$

$\qquad\qquad a_{21} \quad a_{22}$

$$(2 \times 3) \times (3 \times 2)$$

a_{11} = 1ª riga · 1ª colonna $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 6 + 0 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = 2$

a_{12} = 1ª riga · 2ª colonna $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4(-2) = -6$

a_{21} = 2ª riga · 1 colonna $= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 6 + (-2) 0 + (-1)(-1) =$
$= 13$

a_{22} = 2 riga · 2 colonna $= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 4 + (-2) + 2 = 4$

ESEMPIO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 13 & 6 \end{bmatrix}\right]$$

$$(3 \times 2) \cdot (2 \times 4) \qquad (3 \times 4)$$

UNA MATRICE PUÒ ESSERE MOLTIPLICATA PER SE STESSA SOLO SE È QUADRATA.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7 \quad a_{12} = 2 + 2 \cdot 4 = 10 \quad a_{21} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 15$

$a_{22} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 22$

$A^n = A \cdot A \cdot A \ldots$ n volte

IL PRODOTTO E' COMMUTATIVO ? NO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{bmatrix} 2+2 & 0+(-6) \\ 6+4 & 0+(-12) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 10 & -12 \end{bmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} 2+0 & 4+0 \\ 1-9 & 2-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\neq$$

SE ACCADESSE CHE $A \cdot B = B \cdot A$ MATRICI COMMUTABILI

PROPRIETÀ

- ASSOCIATIVA : $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- DISTRIBUTIVA : $A(B+C) = AB + AC$

QUADRATE

•) $A \cdot O = O \cdot A = O$ $\qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

•) $A \cdot I_n = A$ $\qquad I_n$ = elemento neutro.

•) $(A \cdot B)^n = A^n \cdot B^n$

NON ESISTE LA LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO.

In $\mathbb{R}$ SE $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

es: $(x-2)(x+1) = 0$ $\qquad (x-2) = 0 \rightarrow x = 2$

$\qquad (x+1) = 0 \rightarrow x = -1$

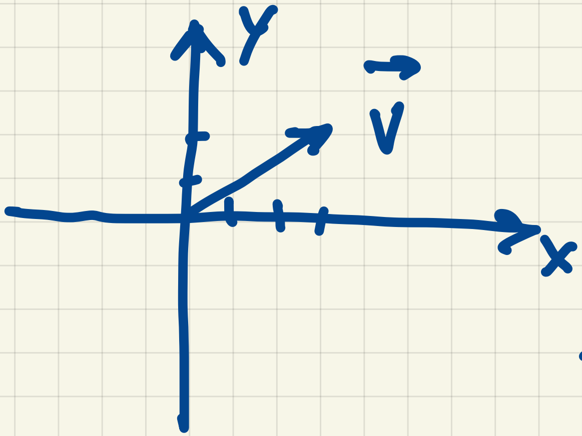
$A \cdot B = 0$ potrebbe accadere $A \neq 0$ E $B \neq 0$

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$a_{11} = \frac{1}{3} \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 0$ $\qquad a_{12} = 0 + 0$ ...

MATRICI E VETTORI

$\vec{v}\,(3\,;\,2)$ $\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$



ES: $\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \end{bmatrix}$

$\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\vec{a}+\vec{b} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \end{bmatrix}$

$\vec{a}-\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix}$

$3\vec{a} = \begin{bmatrix} 18 & -3 \end{bmatrix}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6\cdot 2 + (-1)\cdot 1 = 11$