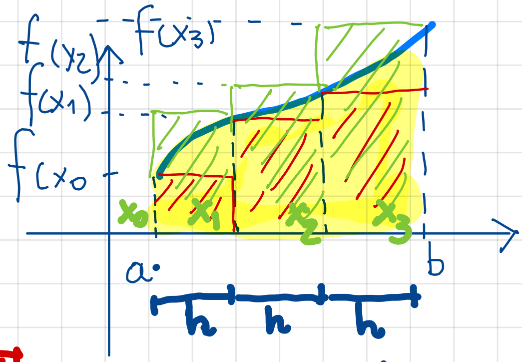
INTEGRAZIONE NUMERICA (Metodo di Riemann)

SIA $f(x)$ UNA FUNZIONE INTEGRABILE E DERIVABILE IN $[a,b]$

METODO DI Riemann o dei RETTANGOLI



DIVIDO IN RETTANGOLI

A) ↓ B) ↑

$$h = \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

CASO A) DIVIDO $[a,b]$ PER n INTERVALLI (ES $n=3$)

AREA ROSSA < AREA VERA (GIALLA)

$$\underbrace{\text{Rett } 1 + \text{Rett } 2 + \text{Rett. } 3}_{A_{min}} < \int_a^b f(x)\,dx$$

CHIAMO x_0, x_1, x_2 coord. di estremi $x_0 \equiv a$ $x_n \equiv b$

$$A_{min} = h \cdot f(x_0) + h f(x_1) + h f(x_2) = h\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$= \frac{b-a}{3} \sum_{i=0}^{2} f(x_i)$$

CASO B) AREA VERA (GIALLA) < AREA VERDE

$$\int_a^b f(x)\,dx < \underbrace{R_1 + R_2 + R_3}_{A\ MAX}$$

$$A\ MAX = h f(x_1) + h f(x_2) + h f(x_3) = \frac{b-a}{3}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right]$$

$$A_{max} = \frac{b-a}{3} \sum_{i=1}^{3} f(x_i)$$

IN GENERALE $A_{min} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq A_{max}$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

ERRORE COMMESSO $\quad \varepsilon_m = \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M'$

M' massimo di $f'(x)$

ESERCIZIO

$$\int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx$$

→ metodo esatto (1)

→ metodo numerico approssimato (2)

(1) $$\int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx = \int_0^2 (1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1+x)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{27}-1\right) \sim 2{,}798$$

(2)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$f(x)$	1	1,095	1,183	1,265	1,342	1,414	1,483	1,549	1,612	1,673	1,732

$n = 10$

$a = 0$

$b = 2$

$h = \frac{b-a}{10} = 0{,}2$

$$A_{min} = h\left[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_9)\right] =$$

$$= 0{,}2\left[1 + 1{,}095 + 1{,}183 + \cdots + 1{,}673\right] = 2{,}723$$

$$A_{max} = h\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{10})\right] =$$

$$= 0{,}2\left[1{,}095 + 1{,}183 + \cdots + 1{,}732\right] = 2{,}870$$

$$2{,}723 \le \boxed{\int} \le 2{,}870$$

ERRORE ?

$$\boxed{\varepsilon_n = \frac{(b-a)^2}{2n} M'}$$

$b-a = 2$ $n = 10$ M' ?

CALCOLO $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ qual è il suo massimo

CALCOLO LA DERIVATA DI $f'(x)$, OVVERO $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{0 - 1\,\cancel{2}\,\frac{\cancel{2}}{\sqrt{x+1}}}{4(x+1)} = \frac{-1}{4(x+1)\sqrt{x+1}} =$$

STUDIO IL SEGNO DI $f''(x) \rightarrow$ dove $f'(x)$ CRESCE
DECRESCE

$f''(x) = 0$ MAI

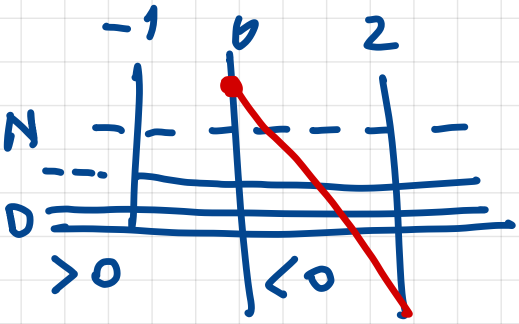
$f''(x) > 0 \Rightarrow$

$N > 0 \quad -1 > 0$ MAI

$D > 0 \quad 4 > 0$ SEMPRE

$x+1 > 0 \quad x > -1$

$\sqrt{x+1} > 0$ SEMPRE



DECRESCE SEMPRE IN $[0,2]$

il valore massimo sarà in $x = 0$

$$f'(0) = M' = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} = 0{,}5 \qquad \varepsilon_n = \frac{(2-0)^2}{2\cdot 10}\cdot 0{,}5$$

$\varepsilon_n = 0{,}1 \qquad A_{min} \leq \int_{VERO} \leq A_{max}$

$$2{,}69 < 2{,}729 \leq 2{,}79 \leq 2{,}87 < 2{,}89$$

$\varepsilon_n \; 0{,}1 \qquad \varepsilon_n = 0{,}1$