TEOREMI DI CAUCHY E DE L’HOSPITAL

M5029

TEOREMA

Teorema di Cauchy

Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono tali che

- $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nell'intervallo $[a;b]$,
- $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in ogni punto interno a questo intervallo,
- $g'(x) \neq 0$, per ogni x interno ad $[a;b]$,

allora esiste almeno un punto c interno ad $[a;b]$ in cui si ha:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

cioè il rapporto fra gli incrementi delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[a;b]$ è uguale al rapporto fra le rispettive derivate calcolate in un particolare punto c interno all'intervallo.

TEOREMA

Teorema di De L'Hospital

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite nell'intorno I di un punto x_0, se

- $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in I eccetto al più x_0,
- $g'(x) \neq 0$ in $I - \{x_0\}$,
- esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

allora esiste anche $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta: $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$.

ESEMPI

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

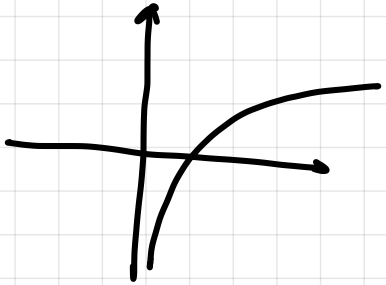
$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^2-2x}{6x-x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{8x-2}{6-5x^4} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{1} = 4$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 4$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{5x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{10x} = \frac{1}{0} \to \infty$$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x^2}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{\ln x}_{\downarrow\, -\infty}$



$\to \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\left(-\frac{\cancel{x^3}}{2}\right) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0$$