

# IL TEOREMA DI LAGRANGE

M5027



SE UNA FUNZIONE  $f(x)$  DEFINITA IN UN INTERVALLO  $[a; b]$  CHIUSO E LIMITATO TALE CHE :

- o)  $f(x)$  continua in  $[a; b]$
- o)  $f(x)$  derivabile in  $I[a; b[$

$f \in C$

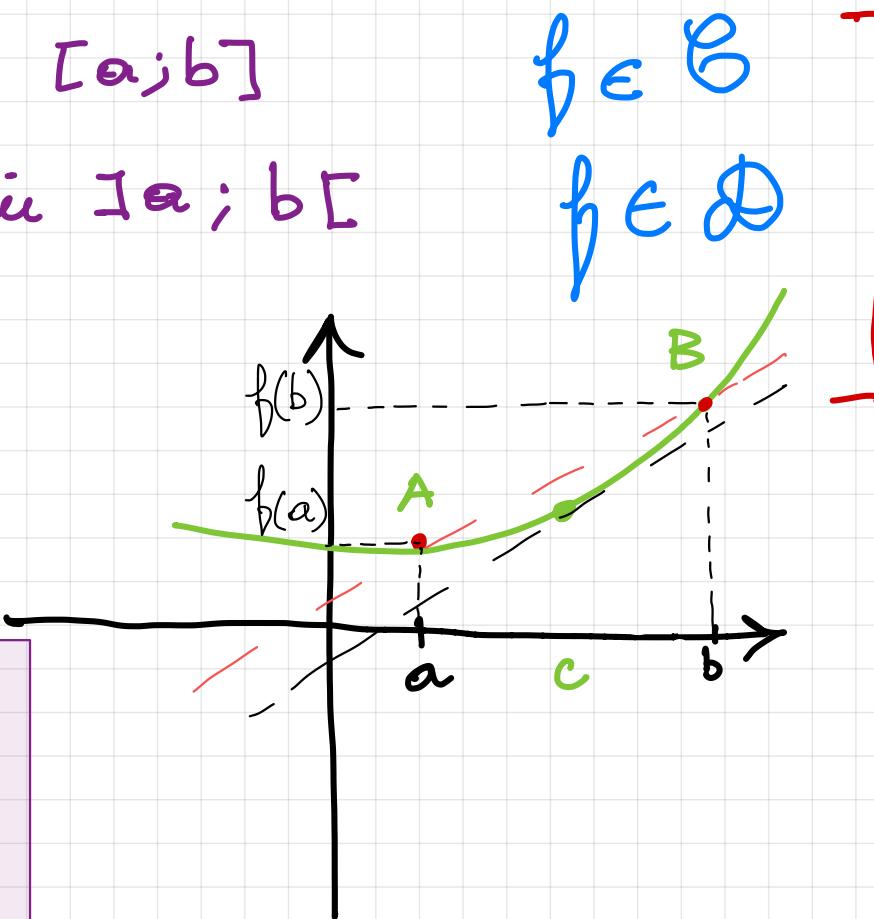
$f \in D$

I POTESI

TESI

$\exists c \in I[a; b[$  tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



OVVERO LA DERIVATA CALCOLATA IN UN PONTO C È UGUALE AL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA SECANTE PER A( $a; f(a)$ ) e B ( $b; f(b)$ )

## DIMOSTRAZIONE :

CONSIDERO UNA FUNZIONE DI SERVIZIO:

$F(x) = f(x) - kx$ , anche lei è continua in  $[a; b]$  e derivabile in  $\mathbb{I} a; b \mathbb{C}$ .

RICAVO  $F'(x) = f'(x) - k$  (1)

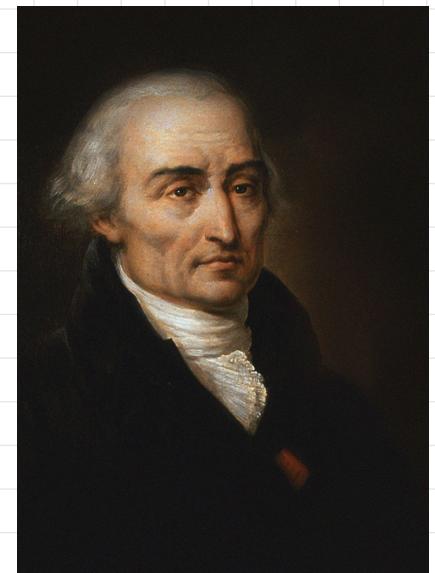
dove il valore  $k$  è un NUMERO e lo scelgo io  
in modo che  $F(a) = F(b)$  che impongo vero.

$$f(a) - ka = f(b) - kb$$

$$\lfloor F(a) \longrightarrow \lfloor F(b) \longrightarrow$$

$$kb - ka = f(b) - f(a) \rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ È UN NUMERO}$$

COSÌ FACENDO LA FUNZIONE DI SERVIZIO È:  $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$



J.L. Lagrange  
TORINO  
1737-1813

con la  $k$  che ho scelto  $F(a) = F(b)$  per cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) \text{ è continua in } [a; b] \\ F(x) \text{ è derivabile in } ]a; b[ \\ F(a) = F(b) \end{array} \right.$$

x T. Rolle



$$\exists c \in ]a; b[ \quad F'(c) = 0$$

OVVERO  
(1)

$$f'(c) - k = 0 \rightarrow f'(c) = k$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c.v.d.

## ESEMPIO 1.

Date le seguenti funzioni, verifica che nell'intervallo indicato a fianco valgono le ipotesi del teorema di Lagrange e trova il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema.

$$f(x) = x^3 + 2x \quad \text{in } [-2; 1]$$

$f$  è continua? sì  $D = \mathbb{R}$  -  $f$  è derivabile sì:  $f'(x) = 3x^2 + 2$

CERCO  $c \in ]-2; 1[$ .

$$f(a) = (-2)^3 + 2(-2) = -12$$
$$f(b) = 3$$
$$a = -2 \quad b = 1$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{3 + 12}{1 + 2} = 5$$

$$f'(c) = 3 \cdot c^2 + 2$$

SEGUE :  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \rightarrow 5 = 3c^2 + 2 \rightarrow c^2 = 1$

$c_1 = +1$   ~~$c_1 = +1$~~

$c_2 = -1$

$+1 \notin ]-2; 1[$

## ESERCIZIO 2:

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \text{ in } [1; 2]$$

D:  $x \neq 0$  quindi nessun problema in  $[1; 2]$

$f$  è continua in  $[1; 2] \rightarrow f'(x)$  ?

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x - (x-1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \quad \text{problematica}$$

in  $x=0$  quindi nessun problema in  $[1; 2]$  dove è derivabile!

$$a=1 ; b=2 ; f(a)=0 ; f(b)=\frac{1}{2} ; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{1}{2}-0}{2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{c^2} \rightarrow c^2 = 2$$

$c_1 = \sqrt{2} \vee c \in ]1; 2[$   
 $c_2 = -\sqrt{2} \notin ]1; 2[$

### ESERCIZIO 3:

$$f(x) = \ln(x+1) \text{ in } [-1; 0]$$

D:  $x+1 > 0 \rightarrow x > -1$  quindi in  $x=-1$  non è continua e le ipotesi di Lagrange non sono valide. non si applica.